Treći domaći zadatak iz predmeta Linearna algebra 1

Preduslov: Pročitati udžbenik do kraja drugog poglavlja

1. Naći vrijednosti parametra a za koje su matrice A, B i C ekvivalentne:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -2 & 2 \\ 0 & 2a & a & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 & 3 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & -a & 2 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & -7 \\ a & 6 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Naći obratnu matricu k matrici

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Ako je matrica A invertibilna tada je njena obratna matrica jedinstvena. Dokazati.

4. Kvadratna matrica Q se naziva ortogonalnom, ako važi $QQ^T = I$.
a) Čemu može biti jednaka determinanta ortogonalne matrice?
b) Da li je skup svih ortogonalnih matrica dimenzija $n \times n$ sa operacijom množenja matrica grupa?

5. Neka su A i B invertibilne matrice istih dimenzija. Dokazati da $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

6. Neka je A kvadratna matrica. Tada $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Dokazati.

7. Neka su P, Q, R, S invertibilne matrice istih dimenzija. Neka je $P = QR^{-1}S$. Izraziti matricu R preko matrica P, Q i S i njihovih obratnih matrica.

8. Neka je A dijagonalna matrica oblika:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

gdje su $a, b, c, d \neq 0$. Naći A^{-1}.

9. Matrica se naziva gornjom trougaonom, ako su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, tj. ako $a_{ij} = 0$ za svako $i > j$. Čemu je jednaka determinanta gornje trougaone matrice?

10. Tragom kvadratne matrice se naziva zbir svih elemenata sa glavne dijagonale, $Tr\,A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Dokazati da $Tr(AB) = Tr(BA)$.

11. Zadata je matrica

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Naći A^p za svaki prirodan broj p.

12. Naći vrijednosti parametra α za koje je matrica

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

regularna.

13. Neka su koordinate vektora $x \in \mathbb{R}^3$ u standardnoj bazi:

$$x(E) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Naći koordinate vektora x u bazi:

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

14. U prostoru $\mathbb{R}^3$ su zadate dvije baze

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

a) Naći matricu prelaska iz baze S u S'.
b) Neka je $x \in \mathbb{R}^3$ vektor čije su koordinate u bazi S:

$$x(S) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Naći $x(S')$.